



EPFL

Enseignants: Basterrechea, Dubuis, Huruguen

Algèbre Linéaire & Géométrie - MAN

3 juillet 2023

Durée : 180 minutes

X

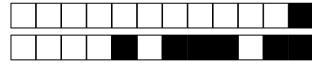
# Examen (énoncé)

SCIPER: **xxxxxx**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 20 pages, la dernière étant vide. Il y a 12 questions pour un total de 42 points. Merci de ne pas dégrafer le livret.

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
  - Aucun **document** n'est autorisé.
  - L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
  - Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
    - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
    - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
    - 0 point si la réponse est incorrecte.
  - Utilisez un **stylo à encre noire** ou **bleu foncé** sauf éventuellement pour vos dessins que vous pouvez faire au **crayon**.
  - Effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
  - Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
  - Les **feuilles de brouillon** seront ramassées mais ne seront pas corrigées.

Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse   select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse   Correct an answer Antwort korrigieren
<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/>
<hr/>		
ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte		
		



## Première partie, questions à choix unique

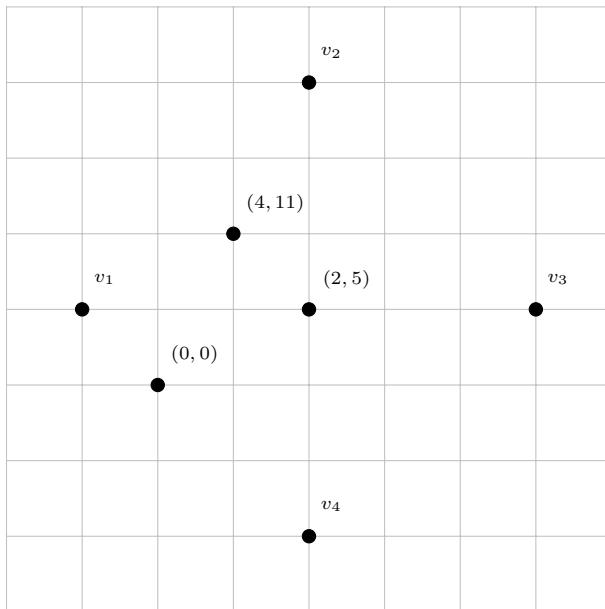
Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

### Enoncé

Soient les bases de  $\mathbb{R}^2$  suivantes :

$$\mathcal{B} = (4, 11), (2, 5) \quad \mathcal{B}' = (2, 4), (2, 10).$$

On donne également le dessin suivant.



Attention ! Le quadrillage donné **ne correspond pas** aux coordonnées canoniques.

**Question 1** (2 points) Quelle est la matrice de changement de base de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$  ?

- $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & -2 \\ 45 & -6 \end{pmatrix}$         $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 45 & -16 \end{pmatrix}$         $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$         $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

**Question 2** (2 points) Sur le dessin ci-dessus, lequel des quatre vecteurs suivants correspond à  $(2, 4)$  ?

- $v_2$         $v_4$         $v_1$         $v_3$

**Question 3** (2 points) Si  $v_1$  est le vecteur sur le dessin, calculer  $[v_1]_{\mathcal{B}'}$ .

- $\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$         $\begin{pmatrix} -4 \\ 61 \end{pmatrix}$         $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$         $\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{51}{6} \end{pmatrix}$

**Enoncé**

Soient  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  deux applications linéaires telles que :

$$f(1, 1, 1) = (0, 0, 0), \quad f(1, 0, 2) = (4, 0, 6), \quad f^{-1}(\{(1, 0, 2)\}) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad g^{-1}(\{(0, 0, 0)\}) = \{(0, 0, 0)\}.$$

**Question 4** (2 points) Le rang de  $f$  vaut :

 2 3 1 0

**Question 5** (2 points) La dimension du noyau de l'application  $g \circ f \circ g$  vaut :

 3 1 0 2

**Question 6** (2 points) Parmi les éléments de  $\mathbb{R}^3$  ci-dessous, lequel appartient à  $\text{Im } f$  ?

 (3, 0, 23) (-39, 67, -201) (17, 61, -68) (119, -41, 12)

**Enoncé**

On donne l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (5x + 13y, -3x - 7y)$$

dont on note  $A$  la matrice en base canonique.

**Question 7** (2 points) Pour quelle base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  ci-dessous, la matrice  $[f]_{\mathcal{B}}$  est-elle sous forme réduite ?

$\mathcal{B} = (0, 1), (\frac{13}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}})$

$\mathcal{B} = (1, 0), (\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\mathcal{B} = (0, 1), (\frac{13}{\sqrt{3}}, -2\sqrt{3})$

$\mathcal{B} = (1, 0), (2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

**Question 8** (2 points) Parmi les nombres suivants, sélectionner le plus petit  $n$  vérifiant que :

$$\det(A^n) \geqslant 1000.$$

$n = 4$

$n = 3$

$n = 6$

$n = 5$

**Question 9** (2 points) Pour quel entier  $n$  ci-dessous la matrice  $A^n$  est-elle diagonalisable ?

$n = 103$

$n = 94$

$n = 96$

$n = 101$



## Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

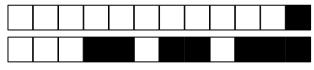
**Question 10:** *Cette question est notée sur 9 points.*

0       1       2       3       4       5       6       7       8       9

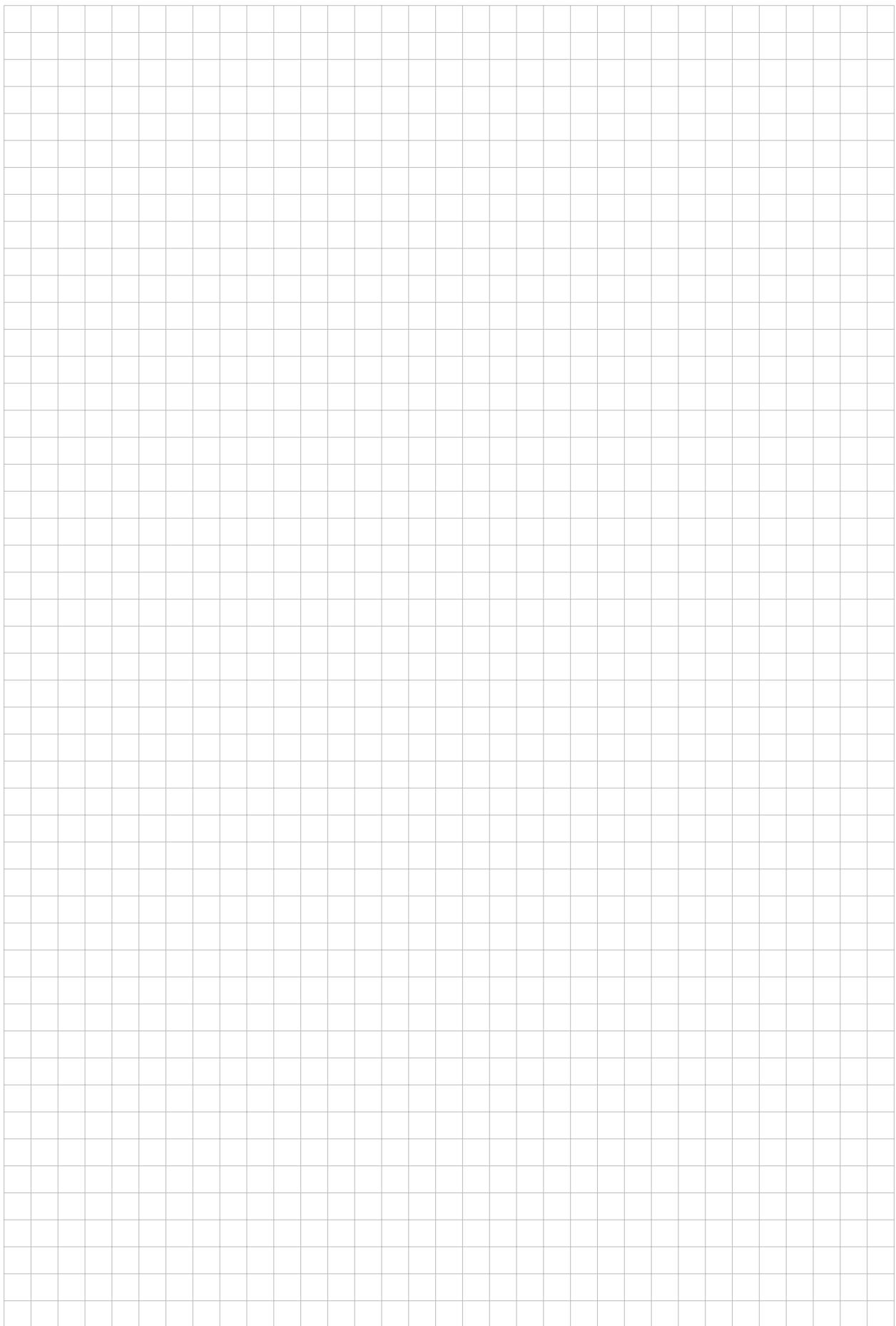
Soit la matrice dépendante d'un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha - 2 & 2\alpha + 3 \\ -\alpha^2 + \alpha + 5 & \alpha^2 - 1 & -\alpha^2 + 4 \\ -2 & -\alpha - 1 & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer et factoriser  $\det(A)$ .
- (b) Déterminer  $\text{rg}(A)$  en fonction de  $\alpha$ .
- (c) En discutant selon les cas identifiés au (b), donner une décomposition colonne-ligne minimale de  $A$ .

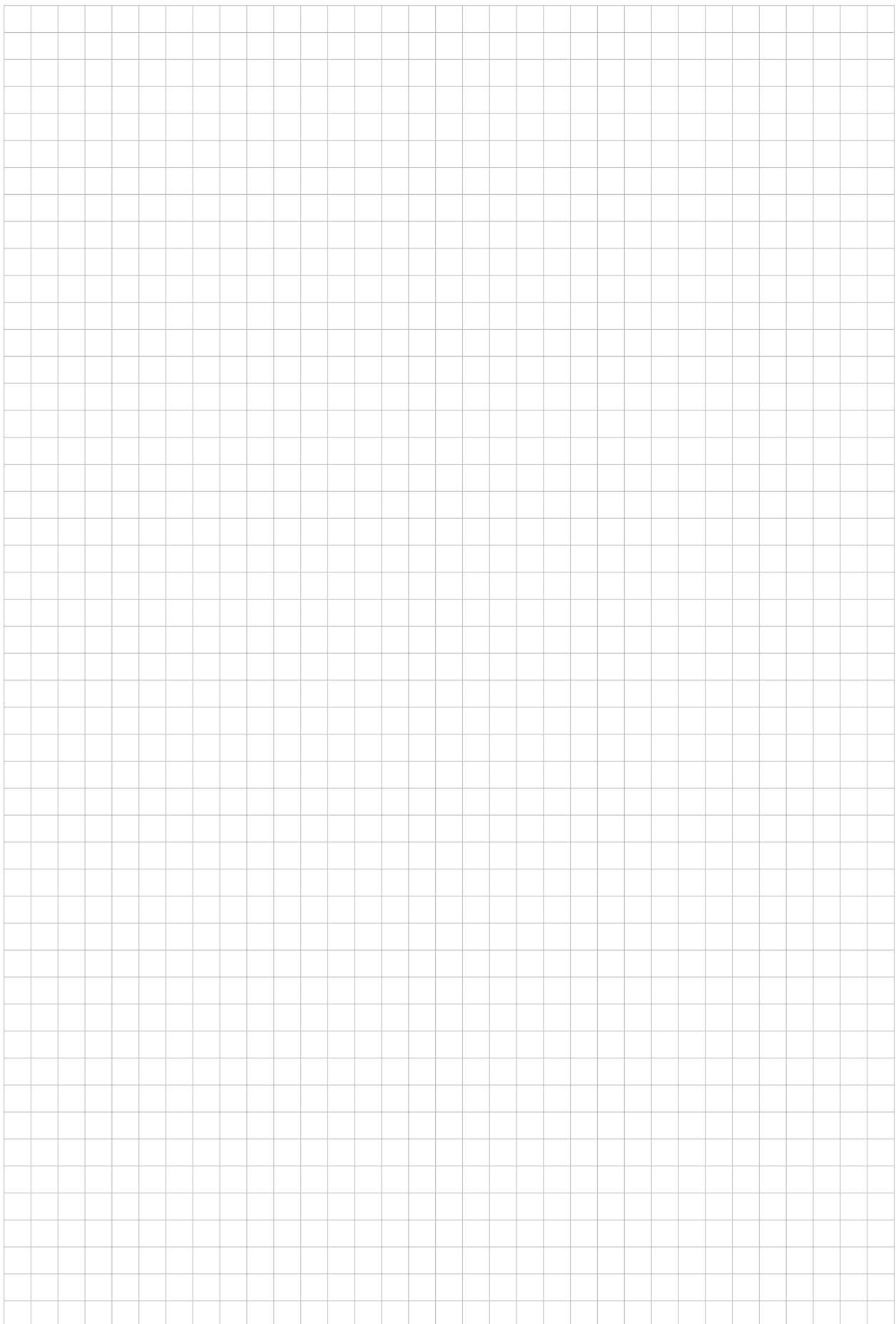


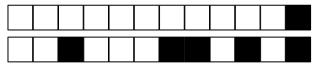
+1/6/55+



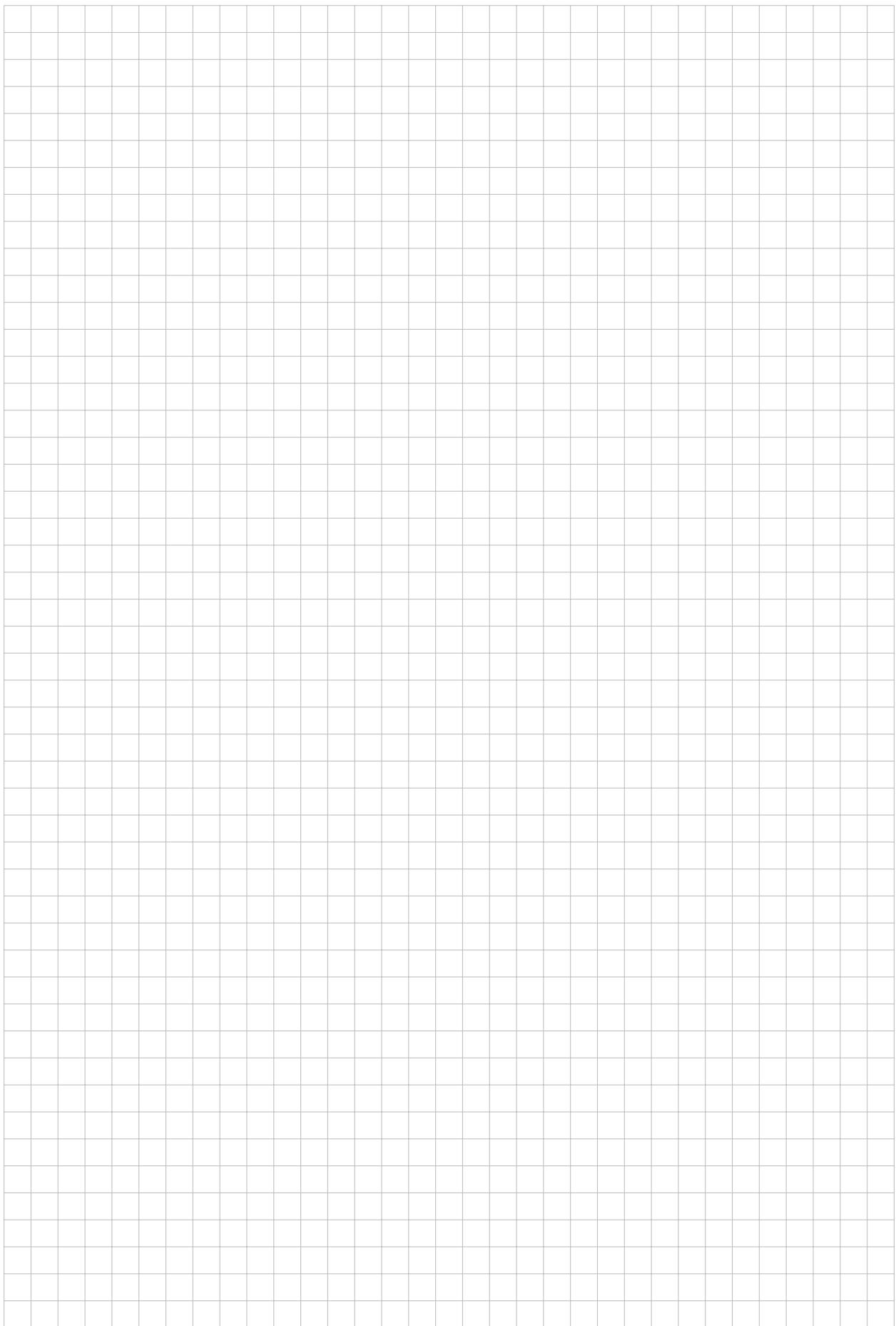


+1/7/54+





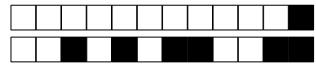
+1/8/53+





+1/9/52+





**Question 11:** Cette question est notée sur 7 points.

<sub>0</sub>     <sub>1</sub>     <sub>2</sub>     <sub>3</sub>     <sub>4</sub>     <sub>5</sub>     <sub>6</sub>     <sub>7</sub>

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on donne les sous-espaces vectoriels :

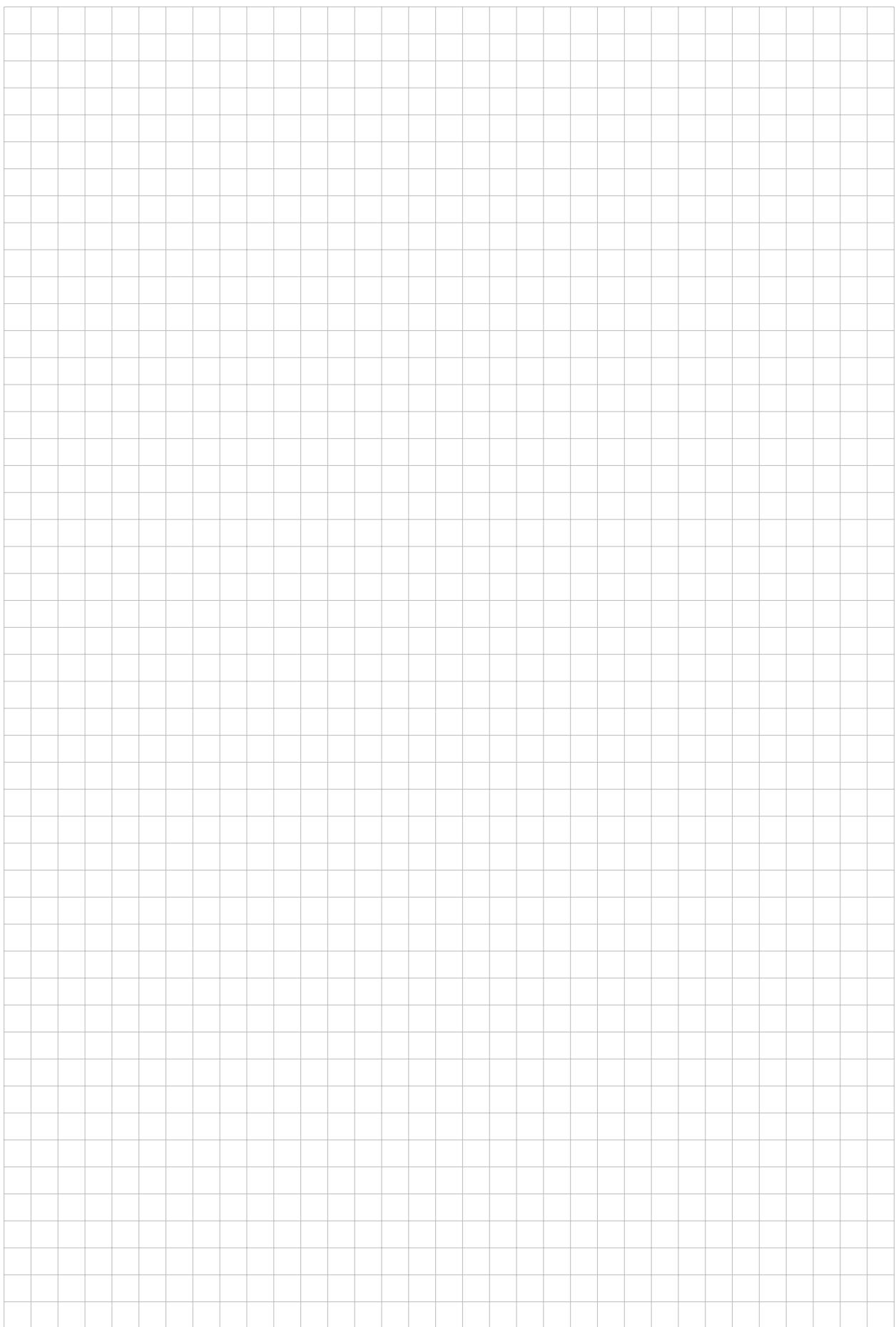
$$V = \text{Vect}((2, 0, -1), (1, 2, 1)) \quad \text{et} \quad W : \frac{x}{2} = 2y = z$$

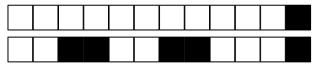
et on note  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la projection sur  $V$  parallèlement à  $W$ .

- (a) Déterminer une équation cartésienne de  $V$ .
- (b) Donner la nature géométrique et les éléments caractéristiques de l'application  $g = \text{id}_{\mathbb{R}^3} - 2f$ .
- (c) Donner l'expression de  $f$ , c'est-à-dire pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , exprimer  $f(x, y, z)$ .

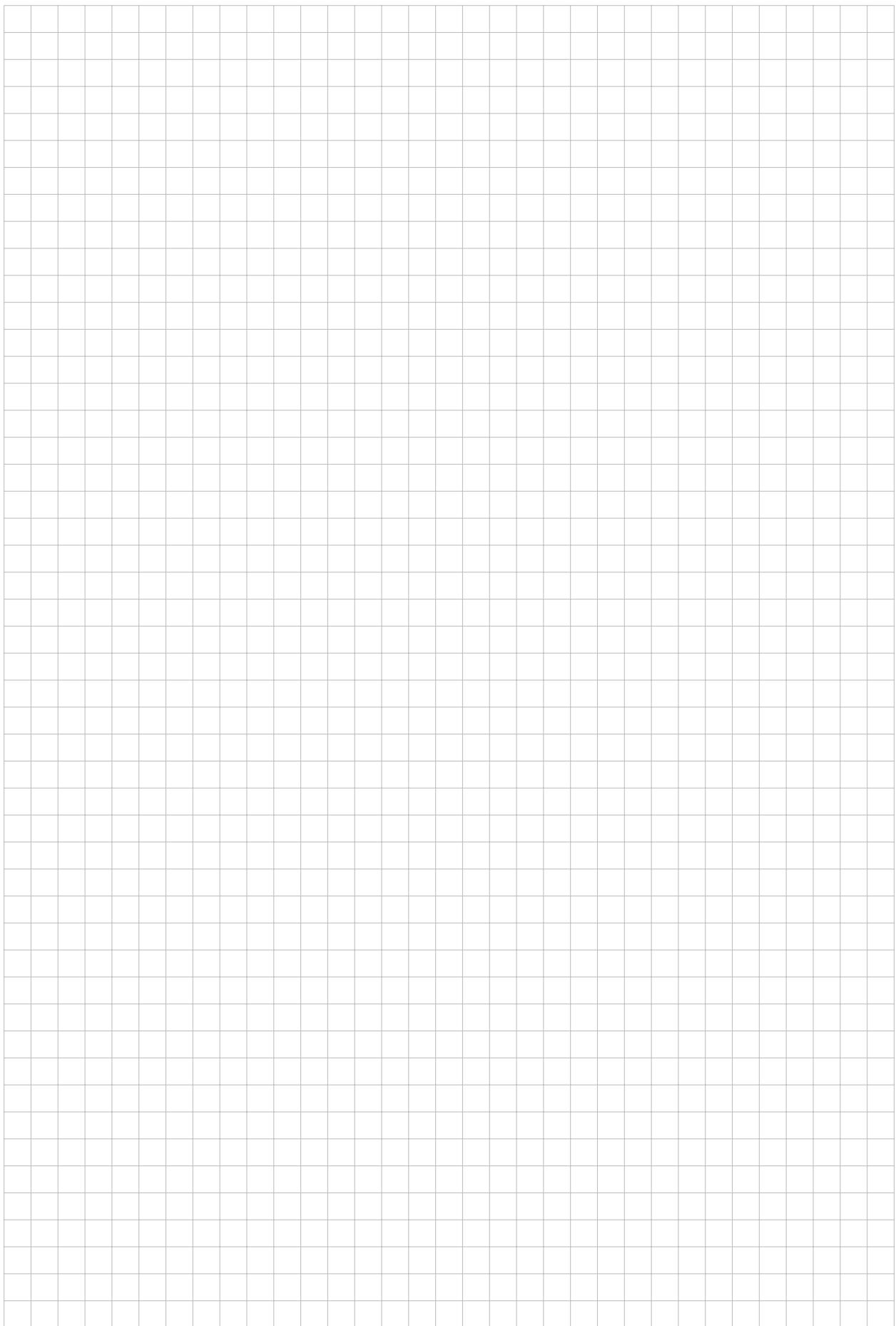


+1/11/50+



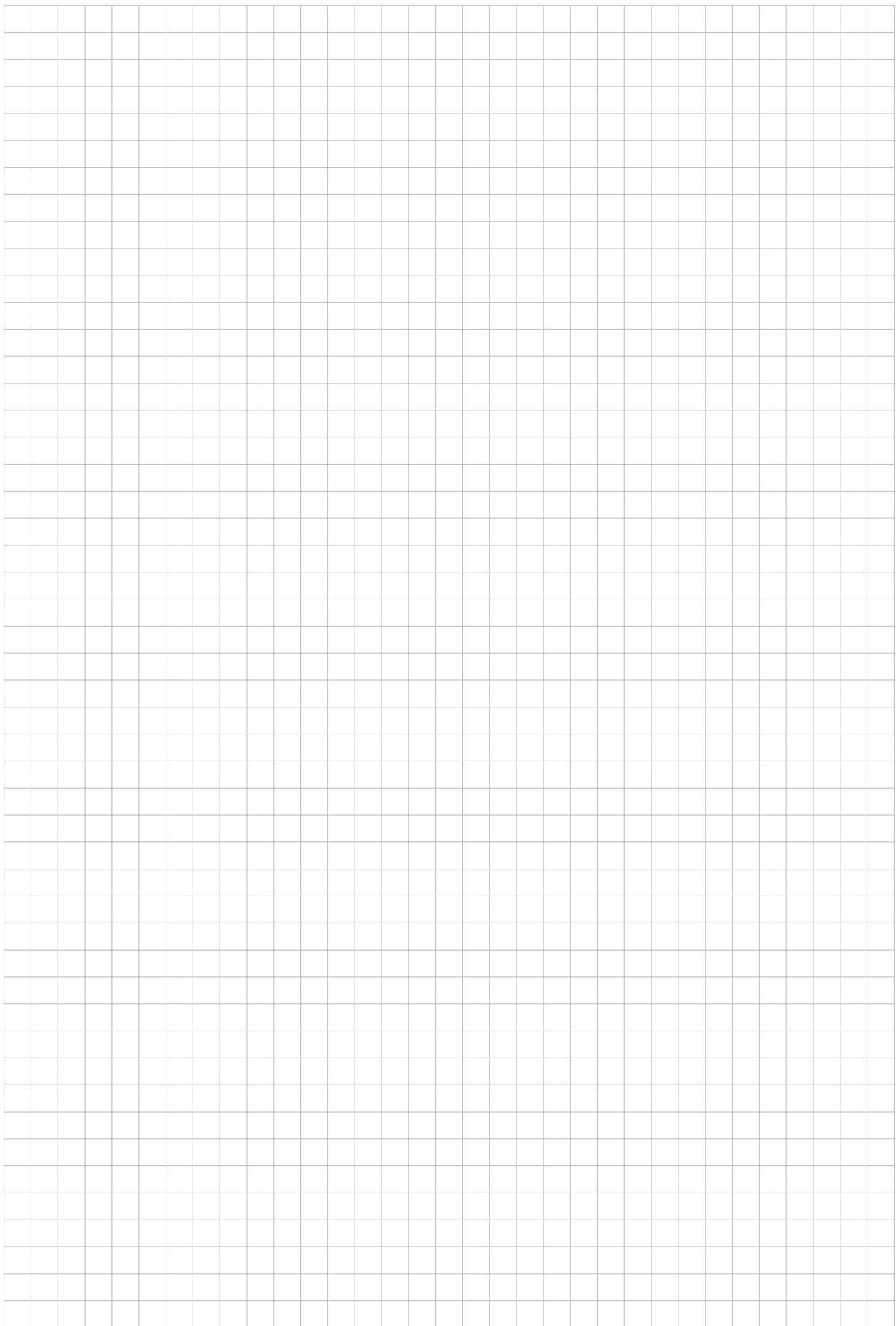


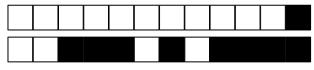
+1/12/49+



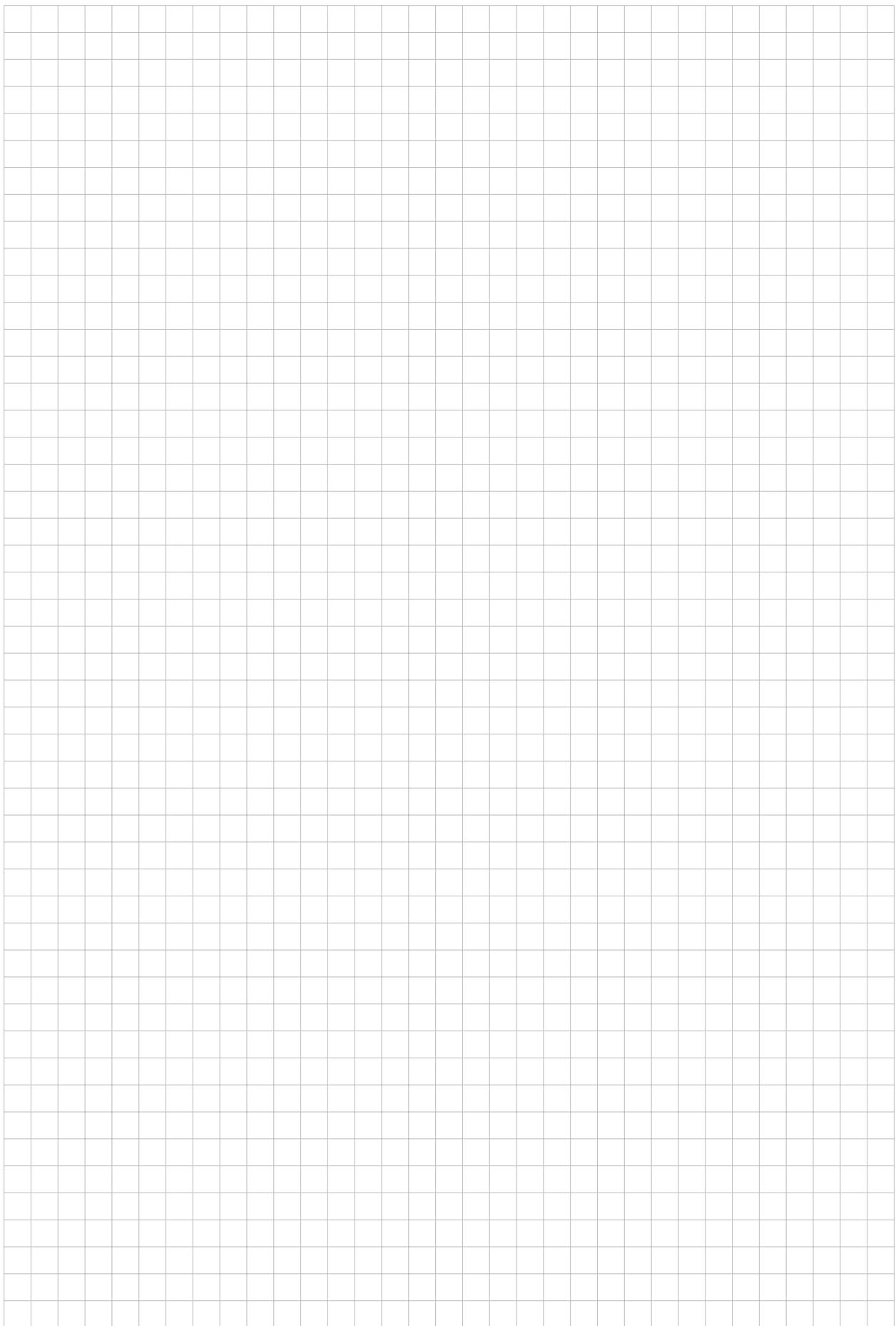


+1/13/48+





+1/14/47+





**Question 12:** Cette question est notée sur 8 points.

<sub>0</sub>     <sub>1</sub>  <sub>2</sub>  <sub>3</sub>  <sub>4</sub>  <sub>5</sub>     <sub>6</sub>  <sub>7</sub>  <sub>8</sub>

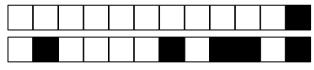
On donne les applications linéaires suivantes, dont on note  $A$  et  $B$  les matrices en bases canoniques :

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 & g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightarrow (2x + 3y + z, -y + z) & (x, y, z) \rightarrow (2x + 4z, -\frac{1}{2}x - y) \end{array}$$

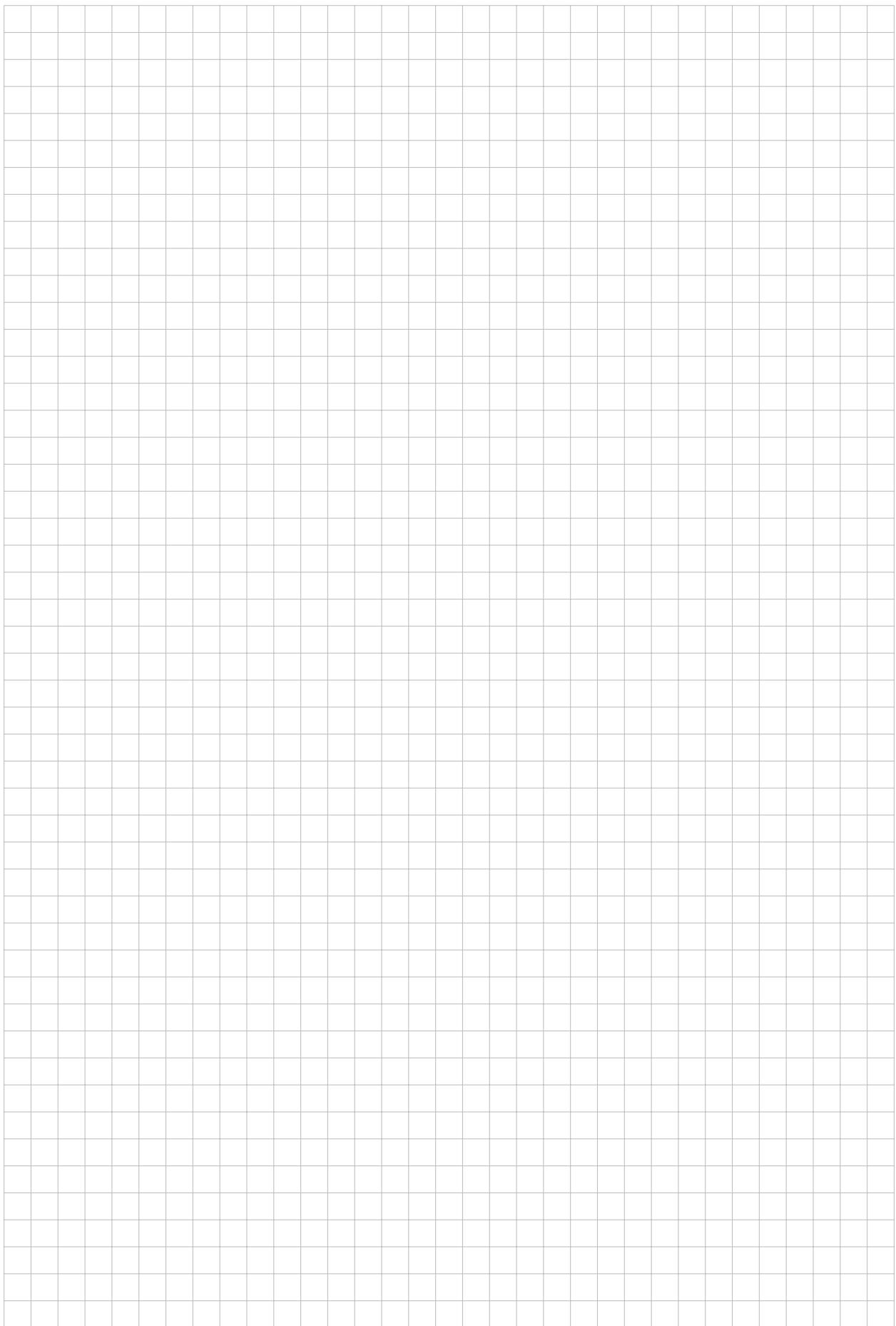
- (a) Déterminer une base de  $\text{Ker } f$ .
- (b) Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont ligne-équivalentes.
- (c) On note  $\mathcal{B}_{\text{can}}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  telle que :

$$[f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}, \mathcal{B}} = B.$$

- (d) Sans aucune justification, donner une matrice colonne-équivalente mais pas ligne-équivalente à  $A + 2B$ .

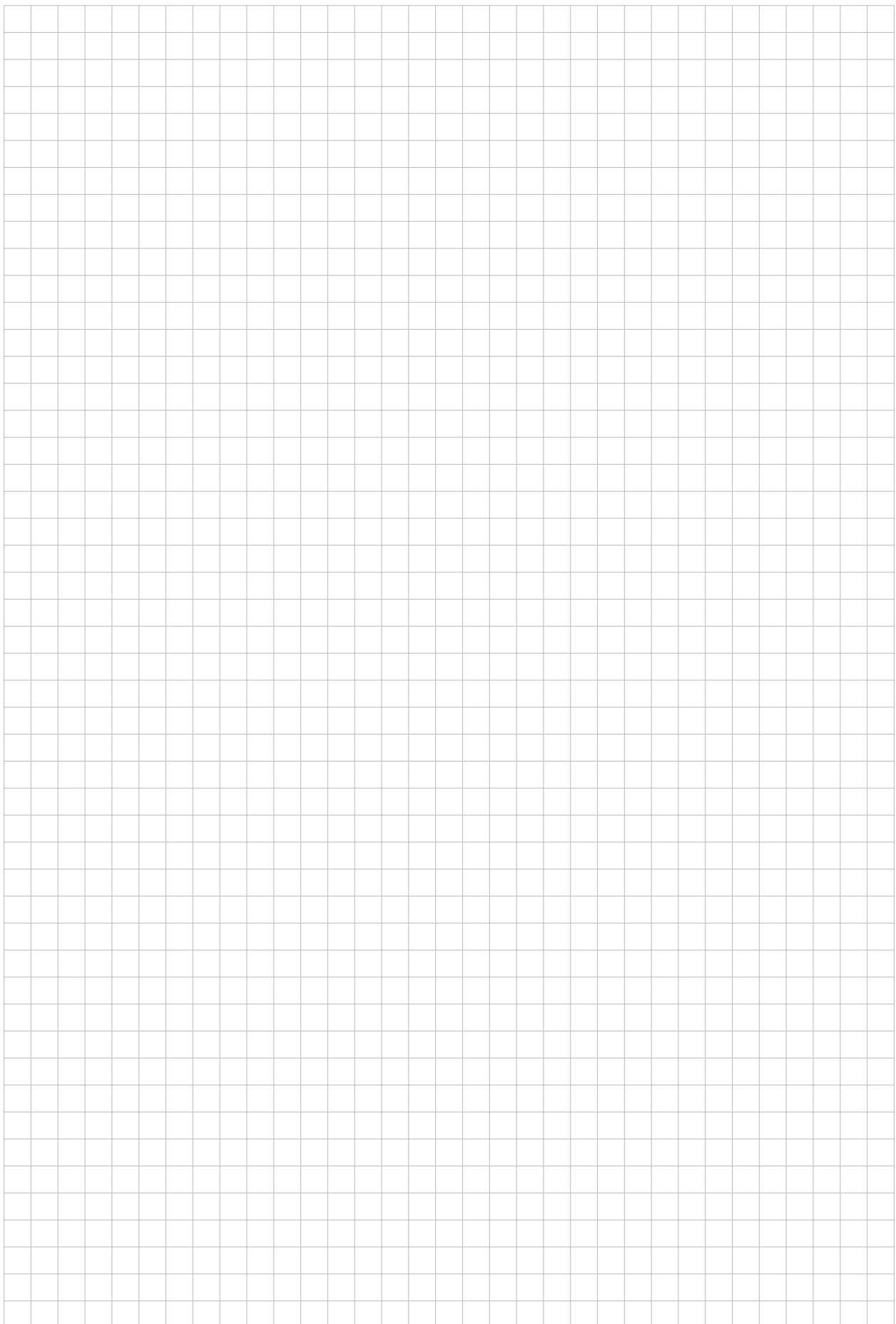


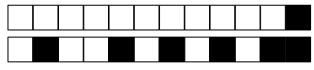
+1/16/45+



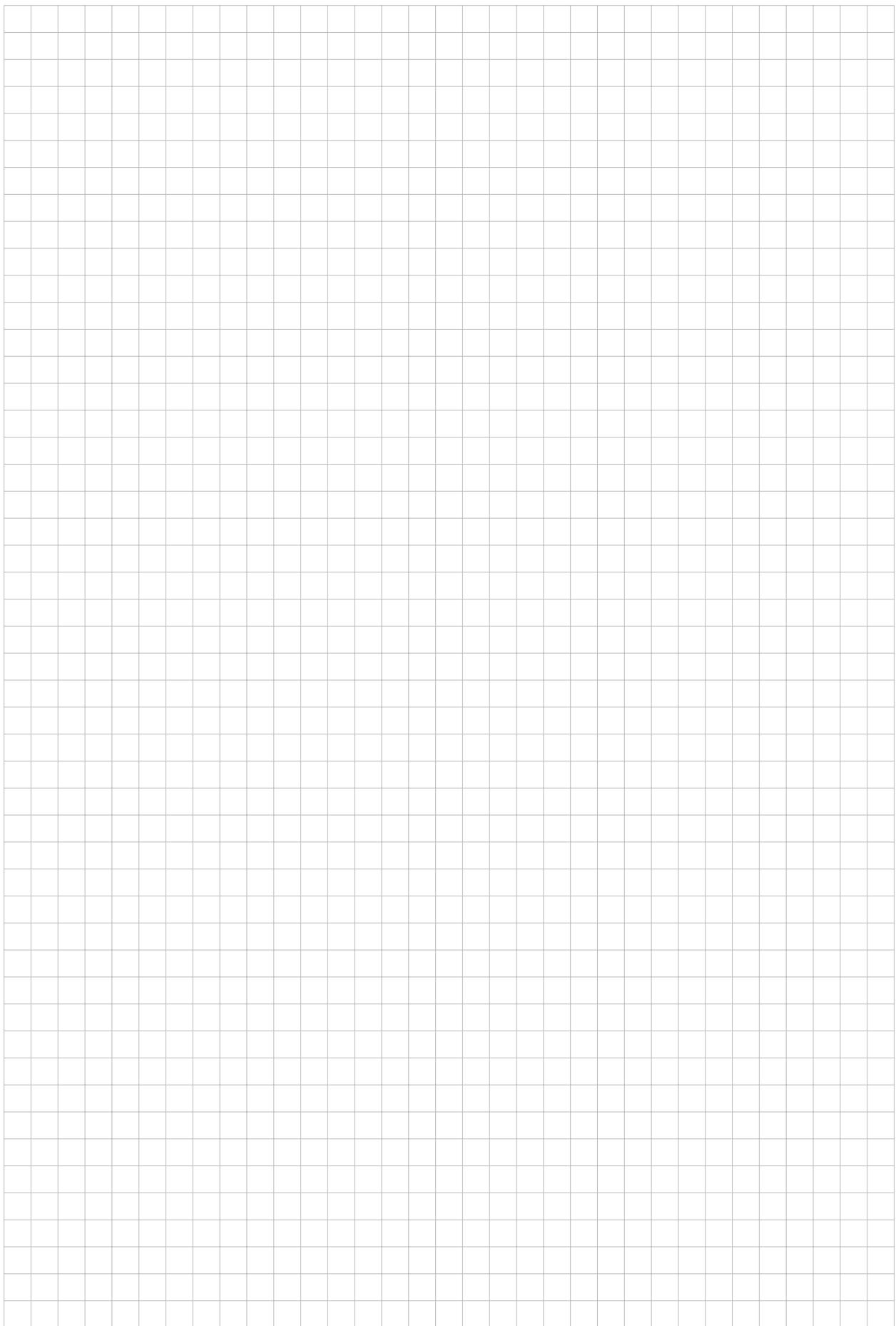


+1/17/44+



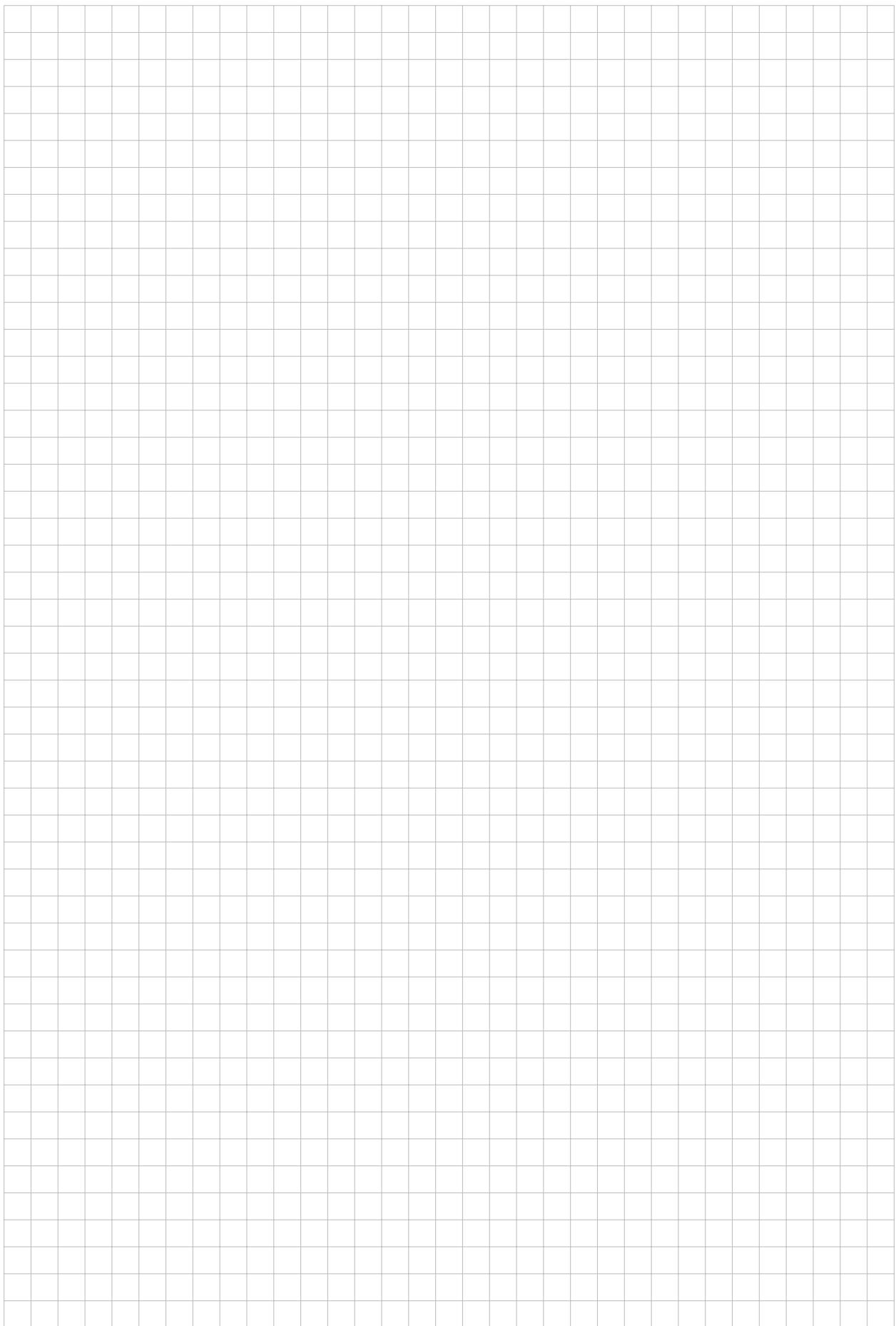


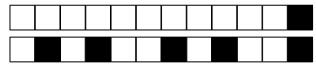
+1/18/43+





+1/19/42+





+1/20/41+

